А. І. Казмерчук

НЕСТАНДАРТНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИКИ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

Рівняння, нерівності та системи рівнянь і нерівностей

Навчально-методичний посібник

Івано-Франківськ

-2026-

ББК:22.1,22.10
УДК 51(031)
К13

К14 Казмерчук А. І. Нестандартні методи розв'язування задач математики: Навчально-методичний посібник // Казмерчук А. І. –Івано-Франківськ: Голіней, 2026. - 102 с.

Рекомендовано до друку Вченою радою факультету математики та інформатики Карпатського національного університету імені Василя Стефаника (протокол № 4 від 19 березня 2026 р.)

Рецензенти:

Кульчицька Н. В., кандидат педагогічних наук, завідувач кафедри математики і інформатики та методики навчання Карпатського національного університету імені Василя Стефаника,

Никифорчин О. Р., доктор фізико-математичних наук, завідувач кафедри алгебри та геометрії Карпатського національного університету імені Василя Стефаника

Навчально-методичний посібник містить задачі, які для учнів відносяться до задач підвищеної складності і потребують нестандартних методів розв'язування. Наводяться методи розв'язування рівнянь, нерівностей та систем рівнянь і нерівностей, які ґрунтуються на геометричних міркуваннях, властивостях симетрії, властивостях функцій з застосуванням математичного аналізу.

Для учнів, вступників до вищих навчальних закладів, керівників гуртків, вчителів та всіх, хто захоплюється математикою

Вступ

> Важкі й складні задачі цікавіше розв’язувати,
> ніж прості. І нехай це не видається
> парадоксом, — легше розв’язувати!
>
> Є. О. Патон

Фундаментальна природничо-математична освіта є найважливішим аспектом розвитку особистості, що потребує оновлення її змісту з урахуванням суспільних запитів, потреб інноваційного розвитку науки та виробництва, запровадження сучасних методів навчання.

Аналіз результатів олімпіад та математичних турнірів з математики свідчить, що більшість учнів хоча і вміють виконувати завдання на стандартне застосування програмового матеріалу за відомими аналогіями і асоціаціями, але не вміють відходити від типових постановок.

Тому основним пріоритетом при підготовці школярів до математичних олімпіад, математичних турнірів, конкурсів тощо має бути формування розвитку компетентності школярів, пов'язаних з нестандартними підходами при розв’язанні рівнянь, нерівностей та систем рівнянь і нерівностей. Основними тут є графічний метод, метод симетрій, метод нелінійних підстановок, методи на основі аналізу області визначення, множини значень, монотонності, опуклості функції тощо. Зазначимо, що цим методам в шкільній програмі приділяється недостатньо уваги.

Навчально-методичний посібник містить задачі, які для учнів відносяться до задач підвищеної складності і потребують нестандартних методів розв'язування.

Алгебраїчні рівняння, нерівності та їх системи

1. Визначити кількість розв'язків рівняння

$$\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{2}\ .$$

Розв'язання. Функція, визначена лівою частиною рівняння, монотонно зростає на ОДЗ, оскільки при зростанні x зростають підкореневі вирази, а, отже, значення коренів та їхня сума. Тому рівняння не може мати більше, ніж один корінь. Зауваживши, що $x=0$ є коренем, робимо висновок, що він єдиний.

Відповідь:1.

2. Розв'язати нерівність

$$\left(x^3+\frac{3}{x}\right)^2-16>0\,.$$

Розв'язання. Запишемо нерівність у вигляді $\frac{\left(x^4+3\right)^2-16x^2}{x^2}>0$ та розкладемо чисельник дробу на множники. Для цього знайдемо його корені, тобто корені многочлена

$$\left(x^4+3\right)^2-16x^2\Rightarrow\left(y^2+3\right)^2-16y=y^{4`}+6y^2-16y+9\,,$$

де $y=x^2$. Звернувши увагу на те, що $y=1$ є коренем, запишемо його у вигляді $(y-1)\left(y^{3`}+y^2+7y-9\right)$. Оскільки $y=1$ є одночасно і коренем кубічного полінома, то $y^{3`}+y^2+7y-9=(y-1)\left(y^2+2y+9\right)$. Отже,

$$\left(x^4+3\right)^2-16x^2=(y-1)^2\left(y^2+2y+9\right)=(x^2-1)^2\left(\left(x^2+1\right)^2+8\right).$$

Далі, щоб записати розв'язки нерівності $\frac{(x^2-1)^2\left((x^2+1)^2+8\right)}{x^2}>0$, чисельник та знаменник якої не приймають від'ємні значення, достатньо з усієї числової
осі відкинути число 0, де не існує вираз, а також значення ± 1, при яких отримуємо рівність. При всіх інших значеннях x дріб додатний.

Відповідь.

$(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ 0)\cup(0;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$.

3. Скільки коренів має рівняння

$$\frac{1}{x}=x^2+3x+3?$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді $x^3+3x^2+3x+1=2$ або $(x+1)^3=2$. Звідси знаходимо єдиний корінь $x=\sqrt[3]{2}-1$.

Відповідь. 1.

4. Розв'язати нерівність

$$(x+2)\sqrt{x^2+1}\le x^2-4.$$

Розв'язання. Знайдемо корені рівняння $(x+2)\sqrt{x^2+1}=x^2-4$. Із умови $x+2=0$ знаходимо корінь $x=-2$. Після ділення на $x+2$ дістаємо рівняння $\sqrt{x^2+1}=x-2$, розв'язуючи яке, маємо $x^2+1=(x-2)^2,\ 4x=3,\ x=\frac{3}{4}$. Перевірка показує, що отримане значення не є коренем рівняння. Число $x=-2$ розбиває числову вісь на два проміжки, на кожному з яких вираз $(x+2)\sqrt{x^2+1}-x^2+4$ має сталий знак. Знак «-» будуть мати числа з проміжку $(-\infty;\ -2)$, який визначає частину відповіді. У відповідь включаємо також корінь $x = -2$.

Відповідь. $(-\infty;\ -2]$.

5. Обчислити суму коренів рівняння

$$\frac{20}{\sqrt{x}} + x\sqrt{x} + x = 22\,.$$

Розв'язання. Ввівши заміну $y = \sqrt{x} > 0$ та позбувшись знаменника, запишемо рівняння у вигляді $y^4 + y^3 - 22y + 20 = 0$. Очевидно, що одним із коренів одержаного алгебраїчного рівняння є $y_1 = 1$. Після ділення рівняння на вираз $y - 1$, отримуємо кубічне рівняння $y^3 + 2y^2 + 2y - 20 = 0$ з коренем $y_2 = 2$. Знову ділячи вираз $y^3 + 2y^2 + 2y - 20$ на $y - 2$, отримуємо квадратне рівняння $y^2 + 4y + 10 = 0$ з від'ємним дискримінантом, яке не має дійсних коренів. Повертаючись до заміни, одержуємо два рівняння $\sqrt{x} = 1$ та $\sqrt{x} = 2$, звідки $x = 1$, $x = 4$. Сума знайдених чисел 5.

Відповідь. 5.

6. Обчислити суму коренів рівняння

$$\left(x^2 - 9x + 20\right)\left(x^2 - 13x + 42\right) = 24\,.$$

Розв'язання. Розклавши кожен з квадратних тричленів на лінійні множники, запишемо рівняння у вигляді

$$(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) = 24\,.$$

Далі, перемноживши два крайні та два середні множники, дістаємо

$$\left(x^2 - 11x + 28\right)\left(x^2 - 11x + 30\right) = 24\,.$$

Введемо заміну $y = x^2 - 11x + 29$. Дістаємо рівняння $(y-1)(y+1) = 24$, звідки $y_{1,2} = \pm 5$. Повертаючись до заміни, отримуємо два рівняння $x^2 - 11x + 29 = \pm 5$, з яких одне $x^2 - 11x + 34 = 0$ з від'ємним дискримінантом не має дійсних коренів, а друге $x^2 - 11x + 24 = 0$ з додатним дискримінантом має два дійсних кореня, сума яких за теоремою Вієта дорівнює 11.

Відповідь. 11.

7. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+5} + 2\sqrt{x^2 + 5x} = 25 - 2x.$$

Розв'язання. Насамперед зауважимо, що область визначення даного рівняння визначається системою нерівностей $\begin{cases} x \ge 0, \\ x + 5 \ge 0, \\ x^2 + 5x \ge 0, \end{cases}$ розв'язки якої утворюють промінь $x \ge 0$. На цій множині кожен з трьох доданків у лівій частині рівняння є монотонно зростаючою функцією. Тому і весь вираз у лівій частині теж монотонно зростає при зростанні x. Зауваживши, що права частина рівняння монотонно спадає, робимо висновок, що дане рівняння може мати не більше одного кореня. Цей корінь можна побачити - це число $x = 4$.

Відповідь. 4.

8. Обчислити суму квадратів коренів рівняння

$$(x+2)^4 + (x+4)^4 = 16.$$

Розв'язання. Функція зліва в рівнянні опукла, як сума двох опуклих функцій $y=(x+c)^4$ (бо $y''=12(x+c)^2\ge 0$). Тому рівняння має не більше двох коренів. Корені $x_1=-4,\ x_2=-2$ знаходимо простим підбором. Отже, $x_1^2+x_2^2=20$.

Відповідь. 20.

9. Обчислити суму коренів рівняння

$$\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{7-x}=2.$$

Розв'язання. Використовуючи тотожність $(a+b)^3=a^3+3ab(a+b)+b^3$, після піднесення обох частин рівняння до кубу, матимемо

$$(x+1)+3\sqrt[3]{x+1}\cdot\sqrt[3]{7-x}\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{7-x}\right)+(7-x)=8.$$

Враховуючи задану в умові рівність, отримуємо $3\cdot\sqrt[3]{x+1}\cdot\sqrt[3]{7-x}=0$. Звідси $x_1=-1,\ x_2=7$ і $x_1+x_2=6$.

Відповідь. 6.

10. Розв'язати рівняння

$$x^2-16(x+1)\sqrt{x}+66x+1=0.$$

Розв'язання. Позбувшись ірраціональності за допомогою заміни $y=\sqrt{x}\ge 0$, запишемо рівняння у вигляді

$$y^4-16y^3+66y^2-16y+1=0.$$

Значення $y=0$ не є коренем цього рівняння. При $y\ne 0$ запишемо його у вигляді $y^2-16y+66-\dfrac{16}{y}+\dfrac{1}{y^2}=0$ та введемо ще одну заміну $z=y+\dfrac{1}{y}$. Оскільки $y^2+\dfrac{1}{y^2}=z^2-2$, то рівняння перетвориться до вигляду

$z^2-16z+64=0$ або $(z-8)^2=0 \Rightarrow z=8$. З рівняння $y+\frac{1}{y}=8$ отримуємо $y=4\pm\sqrt{15}$. Тому $\sqrt{x}=4\pm\sqrt{15} \Leftrightarrow x=\left(4\pm\sqrt{15}\right)^2$ або $x=31\pm8\sqrt{15}$.

Відповідь. $31\pm8\sqrt{15}$.

11. Розв'язати рівняння

$$x^3+x+\sqrt[3]{x^3+x-2}=12.$$

Розв'язання. $x=2$ задовольняє рівняння. А з монотонності функції в лівій частині рівняння випливає, знайдений корінь єдиний.

Відповідь. 2.

12. Обчислити суму коренів рівняння

$$x^2+\frac{81x^2}{(9+x)^2}=40.$$

Розв'язання. Після заміни $y=\frac{1}{x}$ маємо

$$\frac{1}{y^2}+\frac{1}{\left(y+\frac{1}{9}\right)^2}=40.$$

А після заміни $u=18y+1$ і спрощень отримуємо біквадратне рівняння

$$5u^4-91u^2-76=0.$$

Далі знаходимо

$$u^2=19, u^2=-\frac{4}{5}.$$

Отже, $u_{1,2}=\pm\sqrt{19}$, і далі $y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{19}}{18}$, $x_{1,2}=1\pm\sqrt{19}$, $x_1+x_2=2$

Відповідь. 2.