

Міністерство освіти і науки України
Карпатський національний університет
імені Василя Стефаника

О. В. Махней

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Навчальний посібник для студентів
закладів вищої освіти
спеціальності «прикладна математика»

Видання друге, перероблене і доповнене

Івано-Франківськ
2026

УДК 004.94:519.24

ББК 22.18

М36

Рекомендовано Вченою радою факультету математики та інформатики Карпатського національного університету імені Василя Стефаника як навчальний посібник для студентів спеціальності «прикладна математика» (протокол № 1 від 20 січня 2026 р.).

Рецензенти:

Дмитришин Р. І., доктор фізико-математичних наук, професор (Карпатський національний університет імені Василя Стефаника);

П'янило Я. Д., доктор технічних наук, професор (Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача).

М36 Махней О. В. Математичне моделювання : навчальний посібник. Вид. 2-ге, перероб. і допов. Івано-Франківськ : Карпат. нац. ун-т ім. В. Стефаника, 2026. 383 с.

У посібнику викладено навчальний курс з математичного моделювання. Увага приділена як аналітичним, так і імітаційним методам моделювання. У книзі розглянуто застосування диференціальних рівнянь, клітинних автоматів, мови імітаційного моделювання GPSS World та інших методів моделювання різних систем.

Для студентів спеціальності «прикладна математика». Може бути корисним для студентів інших спеціальностей галузі знань «Інформаційні технології» і студентів фізико-математичних спеціальностей, аспірантів, науково-технічних працівників.

УДК 004.94:519.24

ББК 22.18

© Махней О. В., 2026.

Зміст

Передмова	9
Розділ 1. Основні поняття про моделювання	11
§ 1.1. Поняття системи	11
§ 1.2. Поняття моделі	13
§ 1.3. Класифікація видів моделювання	14
§ 1.4. Поняття математичного моделювання	17
§ 1.5. Принципи математичного моделювання	20
§ 1.6. Етапи математичного моделювання	22
Питання до розділу 1	23
Розділ 2. Диференціальні моделі	24
§ 2.1. Побудова диференціальних моделей	24
§ 2.2. Падіння тіла	26
§ 2.3. Вентиляція приміщення	28
§ 2.4. Витікання рідини	29
§ 2.5. Потік частинок у трубці	31
§ 2.6. Взаємодія в системі «хижак-жертва»	34
§ 2.7. Модель розвитку епідемії	39
§ 2.8. Прогин балок	44
Питання до розділу 2	49
Вправи до розділу 2	49
Розділ 3. Скінченні автомати	51
§ 3.1. Скінченні автомати Мілі	51
§ 3.2. Скінченні автомати Мура	52
§ 3.3. Клітинні автомати	54
§ 3.4. Застосування клітинних автоматів до моделювання активних середовищ	57
§ 3.5. Модель розвитку організмів на поживних середовищах	58
§ 3.6. Модель розвитку організмів на поживних середовищах за наявності хижаків	62
Питання до розділу 3	67
Вправи до розділу 3	68

Розділ 4. Мережі Петрі	69
§ 4.1. Поняття класичних мереж Петрі	69
§ 4.2. Формальне означення мереж Петрі і їхнє матричне подання	73
§ 4.3. Властивості мереж Петрі	75
§ 4.4. Матричний аналіз мереж Петрі	77
§ 4.5. Дерево досяжності	82
§ 4.6. Некласичні мережі Петрі	88
§ 4.7. Програма HPetriSim для імітаційного моделювання мереж Петрі	94
Питання до розділу 4	97
Вправи до розділу 4	97
Розділ 5. Аналітичне моделювання систем масового обслуговування	100
§ 5.1. Поняття системи масового обслуговування	100
§ 5.2. Характеристики потоку подій і вхідний потік вимог	101
§ 5.3. Моделювання стаціонарного пуассонівського потоку	103
§ 5.4. Правила обслуговування, організація черги і типи моделей систем масового обслуговування	104
§ 5.5. Аналіз часової діаграми для системи масового обслуговування	107
§ 5.6. Формула Літгла	111
§ 5.7. Багатоканальні системи масового обслуговування з відмовами	112
§ 5.8. Багатоканальні системи масового обслуговування з обмеженою чергою	120
§ 5.9. Багатоканальні системи масового обслуговування з чергою довільної довжини	127
§ 5.10. Основи операційного аналізу мереж систем масового обслуговування	132
Питання до розділу 5	137
Вправи до розділу 5	137

Розділ 6. Основи мови імітаційного моделювання

GPSS World	144
§ 6.1. Основи роботи з середовищем GPSS World	144
§ 6.2. Категорії і типи об'єктів мови GPSS	147
§ 6.3. Системні числові атрибути	149
§ 6.4. Формат рядка	150
§ 6.5. Арифметичні і логічні вирази	153
§ 6.6. Блоки створення, знищення, затримки, зміни параметрів і пріоритету транзактів	155
§ 6.7. Основні блоки і команди опису, пов'язані з пристроями	159
§ 6.8. Блоки і команди опису, пов'язані зі статистичною категорією	163
§ 6.9. Використання змінних, логічних перемикачів і комірок пам'яті	169
§ 6.10. Блок TRANSFER для зміни маршруту руху транзактів	172
§ 6.11. Блоки TEST, GATE і LOOP для зміни маршруту руху транзактів	176
§ 6.12. Елементи стандартного звіту	179
§ 6.13. Функції і генератори випадкових чисел	186
§ 6.14. Математичні функції і функції для генерації випадкових величин	192
§ 6.15. Приклади побудови моделей	194
Питання до розділу 6	205
Вправи до розділу 6	206

Розділ 7. Додаткові можливості мови і середовища GPSS World

§ 7.1. Створення копій транзактів і синхронізація їхнього руху	213
§ 7.2. Матриці	215
§ 7.3. Найважливіші системні числові атрибути	216
§ 7.4. Команди керування	220
§ 7.5. Інформаційні вікна	222

§ 7.6. Імітаційне моделювання виходу з ладу обладнання	228
§ 7.7. Списки користувача	233
§ 7.8. Інтегрування звичайних диференціальних рівнянь	238
§ 7.9. PLUS-процедури	242
§ 7.10. Опитування неактивних транзактів	250
§ 7.11. Виконання блока	250
Питання до розділу 7	251
Вправи до розділу 7	251
Розділ 8. Моделювання випадкових величин	256
§ 8.1. Поняття про метод Монте-Карло	256
§ 8.2. Генератори випадкових чисел	259
§ 8.3. Моделювання випадкових подій	261
§ 8.4. Метод оберненої функції	263
§ 8.5. Моделювання дискретних випадкових величин	267
§ 8.6. Моделювання неперервних випадкових величин	271
§ 8.7. Приклади моделювання	277
Питання до розділу 8	281
Вправи до розділу 8	282
Розділ 9. Вибір розподілів імовірностей	287
§ 9.1. Методи використання даних спостережень для моделювання випадкових процесів	287
§ 9.2. Емпіричні розподіли неперервних випадкових величин та їхнє моделювання у випадку, коли відомі дані окремих спостережень	290
§ 9.3. Емпіричні розподіли дискретних випадкових величин та їхнє моделювання у випадку, коли відомі дані окремих спостережень	293
§ 9.4. Емпірично розподілені випадкові величини та їхнє моделювання у випадку згрупованих даних	296
§ 9.5. Методи оцінки незалежності вибірки	301
§ 9.6. Вибір сім'ї теоретичних розподілів з допомогою гістограми	306

§ 9.7. Графіки функцій щільності розподілів імовірностей	308
§ 9.8. Аналіз ролі випадкової величини в системі	311
§ 9.9. Аналіз підсумкової статистики	313
§ 9.10. Визначення параметрів теоретичних розподілів	317
§ 9.11. Графічні процедури перевірки придатності розподілу	322
§ 9.12. Перевірка гіпотези придатності розподілу з допомогою критерію χ^2	330
§ 9.13. Композиція функцій розподілу	332
§ 9.14. Зміщені розподіли	334
§ 9.15. Зрізані розподіли	337
§ 9.16. Вибір розподілу за відсутності даних спостережень	339
§ 9.17. Групове надходження вимог	342
§ 9.18. Використання умовних розподілів для моделювання випадкових векторів	342
§ 9.19. Двовимірний нормальний розподіл і його моделювання	344
§ 9.20. Двовимірний логнормальний розподіл і його моделювання	348
§ 9.21. Нестаціонарний пуассонівський потік і його моделювання	349
Питання до розділу 9	353
Вправи до розділу 9	354
Критичні точки розподілу χ^2	361
Розділ 10. Планування експерименту	362
§ 10.1. Перехідний і стаціонарний режими	362
§ 10.2. Визначення кількості реалізацій процесу моделювання для оцінювання ймовірності	364
§ 10.3. Визначення кількості реалізацій процесу моделювання для оцінювання середнього значення	367
Питання до розділу 10	369
Вправи до розділу 10	369

Значення функції $\Phi^{-1}(x)$	369
Розділ 11. Прогнозування систем	370
§ 11.1. Основні методи прогнозування систем	370
§ 11.2. Точки біфуркації	371
§ 11.3. Детермінований хаос	372
Питання до розділу 11	375
Список рекомендованої літератури	376
Предметний покажчик	378

Передмова

Моделювання — це потужний універсальний метод дослідження й оцінювання ефективності різноманітних систем. Під математичним моделюванням розуміють процес створення для заданого реального об'єкта деякої математичної моделі, якою може бути як система рівнянь, так і комп'ютерна програма. Математичне моделювання широко використовують у різноманітних галузях і розділах сучасної науки й техніки.

Більшість посібників з математичного моделювання присвячено викладенню окремих методів математичного моделювання. Характерною рисою цього посібника є спроба ознайомити студентів з різноманітними способами математичного моделювання. Разом з тим, у зв'язку з бурхливим розвитком комп'ютерної техніки значна увага у посібнику приділена різним методам імітаційного моделювання.

Перший розділ посібника присвячений поняттю моделі і математичного моделювання. Другий розділ стосується аналітичного моделювання систем з допомогою диференціальних рівнянь. Третій і четвертий розділи присвячено відповідно використанню клітинних автоматів і мереж Петрі для моделювання систем. Аналітичне моделювання систем масового обслуговування розглядається у п'ятому розділі. Шостий і сьомий розділи присвячені опису мови імітаційного моделювання GPSS World і її використання для моделювання систем масового обслуговування. Три наступних розділи посібника стосуються імітаційного моделювання різноманітних систем. Останній розділ присвячений особливостям прогнозування складних систем.

Пропонований посібник охоплює основну частину університетської програми з навчальних дисциплін «Математичне моделювання», «Імітаційне моделювання», «Теорія систем і математичне моделювання» для студентів спеціальності «прикладна математика». Посібник може використовуватись та-

кож студентами інших спеціальностей галузі знань «Інформаційні технології» і студентами фізико-математичних спеціальностей закладів вищої освіти.

Методи моделювання ілюструються різноманітними прикладами. Кінець розв'язаних прикладів позначається символом ■, але у тих випадках, де було ймовірним «загубити» відповідь серед тексту, її написано в кінці прикладу.

Кожен розділ супроводжується питаннями для контролю та самоконтролю засвоєння матеріалу. Майже всі розділи містять вправи для самостійного розв'язування, які у поєднанні з іншими збірниками можуть бути основою для проведення практичних і лабораторних занять з певної теми. Посібник може використовуватись і як довідник, чому сприяє детальний предметний покажчик.

У списку літератури читач знайде перелік літературних джерел, у яких питання, висвітлені у цьому посібнику, викладені по-іншому або більш повно.

Розділ 1. Основні поняття про моделювання

§ 1.1. Поняття системи

Базовими поняттями в теорії і практиці моделювання об'єктів, процесів та явищ є «система» і «модель».

У перекладі з грецької слово «система» буквально означає ціле, яке складається з частин. Можна навести багато сучасних означень системи. Для всіх цих означень спільним є те, що *система* — це сукупність елементів і зв'язків між ними, яка має певну цілісність.

Поняття елемента системи є відносним у тому плані, що елемент — це найменший об'єкт у системі, який не ділять на дрібніші об'єкти, бо це не відповідає меті дослідження. Наприклад, двигун можна вважати елементом автомобіля. У той самий час, автомобіль можна трактувати як елемент транспортної магістралі. Аналогічно поняттю елемента вводиться поняття підсистеми.

Підсистема — частина системи, виділена за певною ознакою, яка володіє певною самостійністю і допускає розклад на елементи.

Кожна система характеризується *емерджентністю* (*цілісністю*), згідно з якою система має таку властивість, яка не зводиться до суми властивостей всіх елементів системи.

Під *структурою* системи розуміють сукупність утворюючих систему елементів і зв'язків між ними.

Систему можна подати з допомогою глобальних рівнянь системи:

$$z(t) = f(x(\tau), z(t_0)), \quad \tau \in [t_0, t], \quad (1.1)$$

$$y(t) = g(x(t), z(t)), \quad (1.2)$$

де $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t))$ — вхідний сигнал, $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t))$ — вихідний сигнал, $z(t) = (z_1(t),$